

Всесибирская открытая олимпиада школьников по
математике 2021-2022 гг.

Заключительный этап

9 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Назовём четырёхзначное число \overline{abcd} *любопытным*, если сумма двузначных чисел ab и cd равна двузначному числу bc . Например, число 1978 любопытное, так как $19+78=97$. Найти количество любопытных чисел.

9.2. Даны натуральные числа a, b, c . Доказать, что, как минимум одно из трёх чисел $a^2 + b + c, b^2 + a + c, c^2 + a + b$ не является точными квадратом, то есть квадратом натурального числа.

9.3. Рассматриваются всевозможные разбиения шахматной доски 8 на 8 на домино из двух соседних по стороне клеток. Определить максимальное натуральное n такое, что для любого разбиения доски 8 на 8 на домино можно найти некоторый прямоугольник, составленный из n клеток доски, не содержащий ни одного домино целиком. Длины сторон прямоугольника в клетках могут равняться любым натуральным числам, начиная с единицы.

9.4. В треугольнике ABC с большей стороной BC биссектрисы пересекаются в точке I . Прямые AI, BI, CI пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. На отрезках BD и CD выбраны точки G и H соответственно такие, что угол GID равен углу ABC , а угол HID - углу ACB . Докажите, что углы BHE и CGF равны.

9.5. На окружности отмечены $n > 1$ точек, называемых *позициями*. делящих её на равные дуги. Позиции занумерованы по часовой стрелке числами от 0 до $n-1$. Вася ставит в одну из них фишку. Далее неограниченное количество раз повторяются следующие действия, называемые *ходами*: Петя называет некоторое натуральное число, а Вася передвигает фишку по часовой стрелке или против неё на указанное Петей число позиций. Если в какой-то момент после хода Васи фишка окажется в позиции номер 0, Вася проиграет, а Петя выиграет. При каких n Петя всегда сможет выиграть, независимо от ходов Васи?